Ueber die mechanische Auffassung elektromagnetischer Erscheinungen in Isolatoren und Halbleitern.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTEIDIGEN

AM 22. NOVEMBER 1894

VON

Ludwig Silberstein

aus Warschau.

OPPONENTEN:

Herr Dr. math. E. Wendt.
„ cand. math. E. Ladewig.
„ cand. chem. A. Wolkowicz.

BERLIN

C VOGTS BUCHDRUCKEREI (E. EBERING).

Linkstrasse 16.

Seinen teuren Eltern

in Liebe und Dankbarkeit gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535723_0256

Das Studium der Abhandlung „On the Reflexion and Refraction of Light“ von Sir W. Thomson[1]) und einer sich daran schliefsenden Abhandlung von J. W. Gibbs[2]) führte mich auf den Gedanken, die Störungen des elektromagnetischen Feldes als identisch mit den mechanischen Deformationen und Bewegungen des Thomson'schen lichttragenden Schaumäthers[3]) aufzufassen. Zu diesem Behufe stellte ich einen Vergleich der elektromagnetischen Energie mit der Summe der potentiellen und kinetischen Energie des Schaumäthers an, woraus eine direkt abzulesende mechanische Deutung elektromagnetischer Phänomene sich ergab. Dabei ist es am einfachsten, die Komponenten des elektromagnetischen Moments $\mathfrak{A}$ als die nach den entsprechenden Axen genommenen Komponenten der Verschiebung eines Schaumteilchens, die specifische dielektrische induktive Kapacität K als Dichte, die magnetische Permeabilität μ als die reciproke Rigidität des Schaumes zu interpretieren. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler elektromagnetischer Störungen oder die sogenannte kritische Geschwindigkeit $v = (K\mu)^{-\frac{1}{2}}$ ist hiernach identisch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen in dem Schaumäther, welche das Licht ausmachen. Weiter folgt unter Anderem, als Konsequenz der eben angedeuteten mechanischen Interpretation, dafs die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$, — ebenso wie in dem Thomson'schen wohlbekannten Modell[4]), — als Drehung des Schaumes, der Gröfse

[1]) Phil. Mag. 26, 1888, November, p. 414–425.

[2]) Phil. Mag. 27, 1889, p. 238–253.

[3]) Die Schaumäthertheorie des Lichtes soll noch im Folgenden kurz vorgetragen werden.

[4]) Papers, Vol. III, p. 436ff. (1890). Hier wird das schon in 1847 berührte Thema wieder aufgenommen.

und der Richtung nach, aufzufassen ist. Die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$, die durch zeitliche Variation der magnetischen in dem Felde erweckt wird, ist nichts anderes, als die Verschiebungsgeschwindigkeit der Schaumteilchen; denn diese Kraft ist durch die zeitliche Variation $\mathfrak{A}'$ des elektrokinetischen Moments bestimmt. Und so scheint, bei unserer Interpretation, der Satz von der magneto-elektrischen Induktion fast eine Tautologie zu sein: wenn die Drehung in dem gegebenen Punkte eines Mediums mit der Zeit (kontinuierlich) sich ändert, dann herrscht ebendaselbst in jedem Augenblicke der Änderung eine gewisse Geschwindigkeit ($\mathfrak{A}'$, also $\mathfrak{E}$). Im Einklange mit der obigen Auffassung des elektrokinetischen Moments wird auch die mechanische Deutung sämtlicher übrig bleibender Vektor- und Skalargröfsen vorgenommen, welche zur Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen in Zeit und Raum dienen.

Dem eigentlichen Thema möge hier eine Auseinandersetzung der neueren Theorie des Lichtäthers, wie sie aus der ursprünglichen Green'schen Theorie sich herausentwickelte, vorausgeschickt werden.

Der Äther, welchen Green[1]) zum Zwecke der dynamischen Herleitung der Gesetze der Reflexion und Brechung des Lichtes aufbaute, ist ein kontinuierliches fest-elastisches Medium, welches einen gewissen Widerstand k gegen Kompression (k^{-1} = Kompressibilität) aufweist und eine gewisse Rigidität n besitzt. (Dies gilt zunächst für den Äther in isotropen Körpern; in krystallinischen wird zwar das k auch als von der Richtung unabhängig angenommen, dagegen ist das n nach verschiedenen Richtungen verschieden: der Green'sche Äther hat in den Krystallen, namentlich den zweiaxigen, drei von einander verschiedene Hauptrigiditäten, aber nur

---

[1]) „On the Laws of Refl. and Refr. of Light at the common surface of two noncrystallized media". Math. Pap., p. 245—269. In dieser Abhandlung bezeichnet Green n mit B und $k + \frac{4}{3}n$ mit A.

ein k). In diesem Äther können sich nun zweierlei Wellenbewegungen unabhängig von einander fortpflanzen: Dilatations- oder Longitudinalwellen mit der Geschwindigkeit $v_l = (k + \frac{4}{3}n)^{1/2} \varrho^{-1/2}$ (wo ϱ die Dichte des Äthers bedeutet) und Transversalwellen mit der Geschwindigkeit $v_t = n^{1/2} \varrho^{-1/2}$. Um die Theorie der Optik mit der Erfahrung in Einklang zu bringen, hätte man also die Annahme zu machen, dafs lediglich nur die Transversalschwingungen, nicht aber die Longitudinalschwingungen, wahrgenommen werden können. Diese notwendige Annahme ist aber noch nicht die hinreichende. Es kann nämlich leicht gezeigt werden, dafs — bei der Brechung des Lichtes an der Grenzfläche zweier optisch verschiedener Medien — reine Transversalschwingungen der Ätherteilchen in dem ersten Medium zur Entstehung einer Transversalwelle und einer Longitudinalwelle in dem zweiten Medium Anlafs geben können, falls nämlich die Schwingungen des einfallenden (geradlinig polarisierten) Lichtstrahls in der Einfallsebene liegen. Diese beiden gebrochenen Wellen würden nun in dem zweiten Medium mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sich ausbreiten, und also die entsprechenden Strahlen mit einander einen endlichen Winkel einschliefsen; beim Austritt aus dem zweiten Medium in das erste (durch eine zweite Grenzfläche) würde wieder ein jeder dieser Strahlen in je einen transversal- und je einen longitudinalschwingenden sich spalten, und die zwei getrennt auftretenden transversalschwingenden Strahlen würden jedenfalls für die Wahrnehmung zugänglich sein. Man hätte also eine nicht durch Anisotropie bedingte Doppelbrechung des Lichtes — eine ihrem Charakter nach von der Doppelbrechung des Lichtes in Krystallen ganz wesentlich verschiedene Erscheinung — der man aber trotzdem, wenigstens bis an den heutigen Tag, nirgends begegnen konnte. Folglich mufs man sich irgendwie von der gebrochenen Longitudinalwelle zu befreien suchen.

Man kann nun auf zweierlei Weise bewirken, dafs die Schwingungen der im brechenden Medium erzeugten Dilatationswelle schon in einer Entfernung weniger Lichtwellen-

längen von der brechenden Fläche ganz unmerklich schwach werden, nämlich: entweder 1) durch die Annahme, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_l der Longitudinalschwingungen im Verhältnis zu der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_t der Transversalschwingungen sehr grofs, oder aber 2) durch die Annahme, dafs $v_l : v_t$ sehr klein sei. — Für Green war es sicher, dafs nur die erstere Annahme mechanisch möglich ist; Thomson hatte aber auch, in der angeführten Abhandlung vom Jahre 1888, die physikalische Möglichkeit eines gemäfs der letzteren Annahme 2) konstruierten Äthers begründet. Bezeichnet man nach Green $k + \frac{4}{3}n$ mit A und n mit B, so ist zunächst klar, dafs weder A noch B negativ sein kann; sonst würden nämlich die Geschwindigkeiten $v_l = A^{1/2}\varrho^{-1/2}$, $v_t = B^{1/2}\varrho^{-1/2}$ imaginär, die entsprechenden Bewegungen also keine periodischen Schwingungen sein. Ein Äther mit negativem A oder B war also sicher nicht zu brauchen. Ferner würde aber ein negatives k negative Kompressibilität bedeuten: ein Körper mit negativem k würde bei einer noch so kleinen Differenz seines Druckes und des Druckes der Umgebung ganz zusammenschrumpfen oder aber an Volumen unbegrenzt zunehmen. Green hatte also in der Überzeugung, dafs ein elastisches Medium mit negativer Kompressibilität unter allen Umständen labil sein müsse, den Bruch $+\frac{4}{3}$ als untere Grenze für das Verhältnis $A : B$, also auch für $v_l^2 : v_t^2$ erklärt (diese untere Grenze würde nämlich für $k = o$ erreicht werden). Dann blieb ihm offenbar nichts übrig, als nur die Annahme zu machen, dafs die Dilatationswellen im Vergleich mit den Transversalwellen sich sehr schnell im Äther ausbreiten. Dadurch ist die Natur des Green'schen Äthers näher bestimmt: er ist ein gallertartiges fest-elastisches Medium, dessen Widerstand k gegen Kompression im Verhältnis zur Rigidität B sehr grofs ist, welches aber keineswegs inkompressibel zu sein braucht. — Green leitet nun aus den Differentialgleichungen der Bewegung und den Grenzbedingungen dieses Äthers die Gesetze der Reflexion und Brechung des Lichtes unter der weiteren Annahme her, dafs beim Übergange aus einem Medium in

ein zweites optisch verschiedenes die Rigidität des Äthers ungeändert bleibt und nur seine Dichtigkeit sich ändert: $B_1 = B_2$, $\varrho_1 + \varrho_2$. Schwingt der einfallende Lichtstrahl senkrecht zur Einfallsebene, so ergeben sich in dieser Weise für die Intensitäten des reflektierten und des gebrochenen Lichtes genau die beiden Fresnel'schen Formeln für in der Einfallsebene polarisiertes Licht[1]). In diesem Falle übrigens macht Green noch keinen Gebrauch von seiner Annahme: $A : B$ = einer sehr grofsen Zahl; denn man hat hier noch mit keinen Dilatationswellen zu thun. Dies geschieht vielmehr erst dann, wenn die einfallenden Schwingungen in der Einfallsebene liegen; die für diesen Fall aus der Green'schen Theorie hergeleiteten Formeln stimmen nun aber nicht mit den entsprechenden Fresnel'schen Formeln überein und weichen von den Experimentalergebnissen sehr stark ab, indem sie für die Intensität des unter dem Polarisationswinkel reflektierten Lichtes einen bedeutend zu grofsen Wert liefern[2]). In dieser Hinsicht liefs also die Green'sche Theorie viel zu wünschen übrig.

Versucht man, diesem Übel dadurch abzuhelfen, dafs man die Green'sche Annahme $B_1 = B_2$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$ durch die Neumann-Mac Cullagh'sche Annahme $\varrho_1 = \varrho_2$, $B_1 \neq B_2$

---

[1]) Ist J_e die (durch die mittlere lebendige Kraft gemessene) Intensität des einfallenden, J_r die des reflektierten, J_g die des gebrochenen Strahles, i und r der Einfalls- und der Brechungswinkel, so lauten diese Formeln:

$$J_r = -J_e \sin(i-r)/\sin(i+r),\quad J_g = J_e \sin 2i/\sin(i+r).$$

Wird in diesem Falle (Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene) die Green'sche Rechnung im ganzen beibehalten, anstatt der Gleichheit der Rigiditäten jedoch Gleichheit der Dichtigkeiten des Äthers in den beiden Mediis — wie in der Neumann-Mac Cullagh'schen Theorie — vorausgesetzt, so erhält man:

$$J_r = J_e\, tg(i-r)/tg(i+r),\quad J_g = J_e \sin 2i/\sin(i+r)\,.\cos(i-r),$$

d. h. also die beiden Fresnel'schen Formeln für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht.

[2]) Fresnel's Formel ergiebt für diese Intensität den Wert o, während in Wirklichkeit nur ein etwas von o verschiedenes Minimum der Lichtmenge unter dem Polarisationswinkel reflektiert wird; der Minimalwert weicht aber ganz unbedeutend von o ab.

ersetzt, im übrigen aber die Voraussetzungen der Green'schen Theorie beibehält, so erhält man wiederum ein Resultat, welches in auffallender Weise mit der Erfahrung im Widerspruch steht. Nach dieser Richtung hin ist nämlich das Problem der Reflexion des in der Einfallsebene schwingenden Lichtes von W. Lorenz[1]) und später von Lord Rayleigh[2]) diskutiert worden; es ergab sich — unter der Voraussetzung, dafs die Differenz der Brechungsvermögen der beiden aneinander grenzenden Medien nur klein ist — für das Verhältnis der Amplituden des reflektierten und des einfallenden Lichtes eine Formel, die man so schreiben kann:

$$A_r : A_e = \text{Const. } \sec^2 i \,.\, \cos 4i;$$

der Ausdruck rechts verschwindet für $\cos 4i = 0$, also für $i = \frac{1}{8}\pi$ und für $i = \frac{3}{8}\pi$. Darnach würde also unter zwei verschiedenen Einfallswinkeln $\frac{1}{8}\pi$ und $\frac{3}{8}\pi$ gar kein in der Einfallsebene schwingendes Licht reflektiert; natürliches Licht würde sowohl durch Reflexion unter dem einen, als auch durch Reflexion unter dem anderen Winkel vollständig in der Einfallsebene polarisiert werden; kurz, man hätte zwei Polarisationswinkel, was in Wirklichkeit niemals vorgekommen ist.

Durch diese Umstände wird man veranlafst, die Annahme gleicher Rigiditäten und verschiedener Dichtigkeiten in der Green'schen Theorie beizubehalten, und, um die hervorgehobenen Schwierigkeiten des Problems der Reflexion und Brechung des Lichtes zu überwinden, hätte man vielmehr die Green'sche Theorie nach einer anderen Richtung hin zu modificieren. Dies that W. Thomson in seiner Schaumäther-Theorie des Lichts, von der weiter unten die Rede sein wird.

In krystallinischen Mitteln, und namentlich in den zwei-

---

[1]) Pogg. Ann. B. CXIV, 1861, p. 238—250. In dieser Abhandlung handelt es sich übrigens hauptsächlich um die Bestimmung der Schwingungsrichtung der Ätherteilchen, welche Frage jedoch mit der Entscheidung zwischen den Annahmen: $B_1 = B_2$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$ und $\varrho_1 = \varrho_2$, $B_1 \neq B_2$ in innigstem Zusammenhange ist.

[2]) Phil. Mag. 1871, August. S. insbesondere p. 93.

axigen Krystallen, besitzt der Green'sche Äther[1]) drei verschiedene Hauptrigiditäten: B_1, B_2, B_3 und, ebenso wie in isotropen Mitteln, nur einen Koëffizienten k, dessen Wert sehr grofs im Verhältnis zu den B ist, und eine konstante Dichte ϱ. Im Innern eines krystallinischen Körpers können Transversal- und Longitudinalwellen unabhängig von einander sich fortpflanzen, doch ist die Geschwindigkeit der letzteren sehr grofs im Vergleich mit der der ersteren; für diese ergiebt sich sofort aus der Green'schen Theorie die bekannte Fresnel'sche Gleichung

$$\frac{l^2}{V^2 - B_1/\varrho} + \frac{m^2}{V^2 - B_2/\varrho} + \frac{n^2}{V^2 - B_3/\varrho} = 0,$$

sodafs im allgemeinen zu jeder Richtung (l, m, n) der Wellennormale zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Transversalschwingungen gehören. Die Richtungen der Rotation und der Verschiebung eines Ätherteilchens stehen auf einander senkrecht und liegen beide in der Wellenfläche. Was nun die krystallinische Reflexion anbelangt, so scheint für einaxige Krystalle ($B_2 = B_3$, $B_1 \neq B_2$) die Green'sche Annahme, wonach die der Axe des Krystalls entsprechende Hauptrigidität (B_2) der Rigidität B des Äthers im angrenzenden isotropen Medium gleichgesetzt wird, plausibel zu sein; bei zweiaxigen Krystallen ($B_1 \neq B_2 \neq B_3$) kann aber keine der drei Hauptrigiditäten bevorzugt, d. h. der Rigidität des Äthers im angrenzenden isotropen Medium gleichgesetzt werden. Wollte man andererseits anstatt dessen voraussetzen, dafs die Dichte des Äthers im Innern des Krystalls und im äufseren Medium einen und denselben Wert hat, so würde diese Annahme ebenso wie

---

[1]) „On the Propagation of Light in crystallized media." 1839. Math. Pap. p. 293—311. Der allgemeinste Ausdruck für die Arbeit der elastischen Kräfte in einem Körper, welcher drei Symmetrieebenen besitzt, enthält 9 Konstanten; so viele Konstanten sind also für denselben charakteristisch; sollen jedoch im Innern des Körpers Transversal- und Dilatationswellen überhaupt unabhängig von einander sich fortpflanzen können, so müssen zwischen den 9 Koëfficienten 5 Bedingungen bestehen, wodurch die Zahl derselben sich auf 4 reduciert, die im Text mit k, B_1, B_2, B_3 bezeichnet sind.

in dem oben besprochenen Falle der gewöhnlichen Reflexion (an der Grenze zweier isotroper Mittel), unangenehmer Weise auf die Existenz zweier Polarisationswinkel führen.

Diese Unbequemlichkeit, mit der man bei Behandlung des Problems der krystallinischen Reflexion und Brechung des Lichts zu kämpfen hat, wird nun in einer Theorie von Lord Rayleigh[1]) beseitigt, welche sich auf die Annahme einer gegenseitigen Wirkung zwischen den Ätherteilchen und den Molekülen der gröberen Materie stützt. Vermöge dieser Wechselwirkung bewegt sich Rayleigh's Äther in zweiaxigen Krystallen so, als hätte er nach drei aufeinander senkrechten Richtungen drei verschiedene Hauptdichtigkeiten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3;[2]) seine elastischen Eigenschaften sind dagegen ebenso wie in isotropen Mitteln nur noch durch die beiden skalaren Green-schen Konstanten A, B charakterisiert, welche für jedes Medium dieselben Werthe besitzen, während die Dichte von Medium zu Medium sich ändert. Die Rayleigh'schen Differentialgleichungen der Bewegung des Äthers in zweiaxigen Krystallen (s. weiter unten, S. 21, Gl. 2) sind ganz von derselben Form wie die des Green'schen Äthers in isotropen Mitteln, nur mit dem einzigen Unterschiede, dafs dort die Dichte eine skalare, hier dagegen eine Vektorgröfse ist, deren Betrag von der Richtung abhängt. Für das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergiebt sich aus Rayleigh's Differentialgleichungen die cubische Gleichung:[3])

---

[1]) Phil. Mag. 1871, June.

[2]) Ein Beispiel, in welchem man die Dichte als eine von der Richtung abhängige Gröfse auffassen kann, bietet uns die Bewegung eines festen Ellipsoids in einer unbegrenzten Flüssigkeit; ist das Ellipsoid in einer schwingenden Bewegung, von kleiner Amplitude und von irrotationalem Charakter begriffen, und sind die Komponenten seiner Geschwindigkeit, nach seinen Axen, resp. gleich dx/dt, dy/dt, dz/dt, so haben die in dieselben Axen fallenden Komponenten des resultierenden von der Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausgeübten Druckes die Form $a_1\, d^2x/dt^2$, $a_2\, d^2y/dt^2$, $a_3\, d^2z/dt^2$, wo a_1, a_2, a_3 von einander verschiedene Gröfsen sind. Das Ellipsoid schwingt also unter der Einwirkung der umgebenden Flüssigkeit genau so wie ein materielles Teilchen, dessen Dichte eine Funktion der Bewegungsrichtung wäre.

[3]) Glazebrook. Phil. Mag. (5). Vol. XXVI, p. 521.

$$\frac{l^2}{v^2 - B/\varrho_1} + \frac{m^2}{v^2 - B/\varrho_2} + \frac{n^2}{v^2 - B/\varrho_3} = \frac{A}{(A-B)v^2}; \quad \ldots\ldots (A)$$

man hätte also drei Wellen. Macht man nun, mit Rayleigh, wieder die alte Green'sche Annahme: $A : B = \infty$, so geht die obige Gleichung über in

$$\frac{l^2 \cdot B/\varrho_1}{v^2 (v^2 - B/\varrho_1)} + \frac{m^2 \cdot B/\varrho_2}{v^2 (v^2 - B/\varrho_2)} + \frac{n^2 \cdot B/\varrho_3}{v^2 (v^2 - B/\varrho_3)} = 0;$$

man erhält also, wie vorauszusehen war, für eine Welle $1, v^2 = 0$; $v = \infty$ — das wird die Dilatationswelle sein — und für die beiden anderen, die Transversalwellen, die quadratische Gleichung

$$\frac{l^2 \cdot B/\varrho_1}{v^2 - B/\varrho_1} + \frac{m^2 \cdot B/\varrho_2}{v^2 - B/\varrho_2} + \frac{n^2 \cdot B/\varrho_3}{v^2 - B/\varrho_3} = 0.$$

Die letztere Gleichung stimmt aber mit der Fresnel'schen, welche anerkannter Weise der Wirklichkeit sehr genau entspricht, nicht überein. Dies würde also ein schwacher Punkt der Rayleigh'schen Theorie sein, welche demgemäfs modificiert werden mufs.

Ein Blick auf die Gleichung (A) lehrt aber, dafs man daraus die Fresnel'sche Gleichung mit einer beliebigen Genauigkeit erhalten kann, indem man das Verhältnis $A : B$, anstatt sehr grofs, hinreichend klein voraussetzt, d. h. die oben unter 2) angeführte Annahme macht.

Die letztere Annahme bildet nun eben den Ausgangspunkt für die Thomson'sche Theorie des Äthers[1]). Sie wurde zwar zuweilen schon seit langer Zeit in die Rechnungen eingeführt[2]); Thomson hatte aber zuerst gezeigt, dafs dieselbe physikalisch möglich ist. Wie oben erwähnt wurde, bedeutet die Annahme $A : B < \frac{4}{3}$ nichts anderes, als negative Kompressibilität; daher glaubte Green, es sei für die Stabilität

[1]) „On the Refl. and Refr. of Light."

[2]) Fresnel schreibt dem Äther zuweilen einen unendlich grofsen, zuweilen aber auch einen unendlich kleinen Widerstand gegen Kompression zu. Vgl. z. B. Poincaré, „Théorie math. de la lumière." I, p. 56.

des Äthers die Bedingung $A : B > \frac{4}{3}$ notwendig. Thomson zeigt aber, dafs dies keineswegs der Fall ist. Nimmt man nämlich an, dafs der Äther einen begrenzten Raum ausfüllt und an der Begrenzungsfläche, wenigstens mit Ausschlufs gewisser Punkte und Linien, in Ruhe sich befindet, oder aber nach jeder Richtung hin ins Unendliche sich erstreckt, und dafs in dem letzteren Falle die Verschiebungen ξ, u. s. w. der Teilchen in der Unendlichkeit so klein werden, dafs die Produkte $\xi \frac{\partial \xi}{\partial x}$, u. s. w. wenigstens von der dritten Ordnung unendlich klein werden (diese Bedingung hat Thomson übersehen), so kann man den Ausdruck für die Arbeit, die man gegen die elastischen Kräfte des Äthers zu leisten hat, um denselben aus seinem Gleichgewichtszustande in einen unendlich benachbarten deformierten Zustand zu überführen, durch partielle Integrationen auf die Form:

$$W = \int d\tau \left\{ \tfrac{1}{2} A\sigma^2 + 2B\omega^2 \right\}$$

bringen, wo σ die Dilatation, ω die Drehung bedeutet, und wo die Integration über das ganze Volumen des Äthers auszudehnen ist. Diese Arbeit wird positiv und daher der neutrale Zustand des Äthers ein Zustand stabilen Gleichgewichts sein, sobald nur A und B positive Werte haben. Die untere Grenze für A sowohl wie für B ist Null. Unbeschadet der Stabilität des Äthers kann man also $A : B$ beliebig klein machen, sodafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatationswellen im Vergleich mit der der Transversalwellen ebenfalls beliebig klein wird. Schreibt man dem Äther im „leeren“ Raume eine gewisse Dichte ϱ zu, so mufs der Wert von B so grofs gewählt werden, dafs, in runden Zahlen, $B^{1/2} \varrho^{-1/2} =$ 300 000 km. sek.$^{-1}$ wird, und in der Thomson'schen Theorie ist nun $A : B$ sehr klein, sodafs die reciproke Kompressibilität k negativ und dem absoluten Betrage nach nur unmerklich kleiner als $\frac{4}{3}$ der Rigidität ist. Die Stabilität dieses Äthers gleicht der eines Schaumes, welcher den festen Wänden eines

ihn einschliefsenden Gefäfses anhaftet, und welcher sonst zusammenstürzen würde; wir werden auch diesen Äther kurz den Schaumäther nennen. Die potentielle Energie der Dilatationen ist hier verschwindend klein im Vergleich mit der potentiellen Energie der Rotationen; im älteren Gallertenäther fand das Gegenteil statt. Würde man absolut $A = 0$ setzen wollen, so müfste man in einer zweiten Annäherung und, damit der neutrale Zustand des Schaumäthers nicht der eines teilweise indifferenten Gleichgewichts sei, in dem Ausdrucke der potentiellen Energie auch noch die homogene Funktion vierten Grades der 9 partiellen Differentialquotienten der Verschiebungskomponenten in Bezug auf die Koordinaten mit berücksichtigen.

In der angeführten Abhandlung giebt Thomson die Anwendung seiner Theorie des Äthers auf die Reflexion des Lichts an der Grenze zweier isotroper Medien; für die beiden Fälle des in und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichts erhält er die beiden entsprechenden Fresnel'schen Formeln. Dabei nimmt er für die beiden angrenzenden Medien gleiche Rigidität des Äthers an, was übrigens bei der besagten Konstitution des Schaumäthers eine notwendige Folge der Kontinuität der in die Grenzfläche fallenden Komponenten des elastischen Druckes bildet. — Verbindet man die Thomson'sche Annahme über die Konstitution des Äthers mit der zuletzt erwähnten Rayleigh'schen Theorie, setzt man also demgemäfs in der Gleichung (A) $A : B$ sehr klein voraus, so ergiebt sich mit grofser Annäherung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden wahrnehmbaren Wellen im Innern eines Krystalls die Fresnel'sche Gleichung und aufserdem noch eine dritte Welle, die sich mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit ausbreitet. Die Schwingungsrichtung (λ, μ, ν) drückt sich aber durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v und die Richtung (l, m, n) der entsprechenden Wellennormale mittels der Gleichungen aus:

$$\frac{(v^2 - B/\varrho_1)\,\lambda}{(B/\varrho_1)\cdot l} = \frac{(v^2 - B/\varrho_2)\,\mu}{(B/\varrho_2)\cdot m} = \frac{(v^2 - B/\varrho_3)\,\nu}{(B/\varrho_3)\cdot n},$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 = l^2 + m^2 + n^2;$$

substituiert man hierin für v die sehr kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der dritten Welle, so folgt für die Schwingungsrichtung derselben annähernd:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mu}{m} = \frac{\nu}{n};$$

die dritte sehr langsam sich fortpflanzende Welle ist also, in der That, eine quasi-longitudinale. — Rayleigh's Theorie mit der Thomson'schen Modifikation liefert auch für die Intensitäten bei krystallinischer Reflexion und Brechung in den beiden Fällen des senkrecht zur Einfallsebene oder in derselben schwingenden Lichts je zwei Formeln, welche mit den entsprechenden Formeln der elektromagnetischen Theorie vollkommen identisch sind. — Sieht man von den Erscheinungen der Dispersion ab, so scheint heutzutage die neue Rayleigh-Thomson'sche Theorie unter allen mechanischen Theorieen des Lichts die meisten Vorteile zu bieten. — Eine einigermafsen genaue Darlegung der gemeinsamen und der unterscheidenden Punkte, der Nachteile und Vorzüge dieser und aller übrigen hervorragenden Theorieen der Optik würde uns hier zu weit führen, und dürfte überdies keine leichte Aufgabe sein. In dem Obigen haben wir nur die Entwicklung der neueren Theorie des quasi-labilen Schaumäthers, mit welchem im Folgenden das elektromagnetische Feld verglichen werden soll, aus der ursprünglichen Green'schen Theorie des gallertartigen Äthers skizzieren wollen.

Wodurch werden wir nun veranlafst, den elektromagnetischen Äther, d. h. ein hypothetisches materielles Substrat der elektromagnetischen Erscheinungen, mit dem Schaumäther, dessen sich die neuere Lichttheorie so erfolgreich bedient, zu identificieren?

Die Hertz'schen Versuche liefern uns einen ganz konkreten Beweis dafür, dafs im elektromagnetischen Felde Wellen transversaler Störungen mit endlicher Geschwindigkeit sich fortpflanzen können, genau so wie es die Lichterschütterungen in dem elastischen Äther thun; dafs die ersteren auch die-

selben Gesetze der annähernd geradlinigen Fortpflanzung in isotropen homogenen Medien, der Reflexion und Brechung an der Grenze heterogener Mittel befolgen, dafs sie ebenso wie das Licht polarisiert sein können. Und es unterliegt wohl keinem Zweifel, dafs sämtliche Erscheinungen, die in das Gebiet der Optik gehören, sich mit elektromagnetischen Störungen reproducieren lassen werden. Was aber die theoretische Seite des Gegenstandes anbelangt, so stimmen die Differentialgleichungen, denen die beiden Arten transversaler Störungen gehorchen, der Form nach vollständig mit einander überein; die reinen Transversalstörungen können bekanntlich jedenfalls von etwaigen Longitudinalstörungen getrennt werden; dann lauten die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes und zugleich die des elastischen Äthers in einem isotropen, vollkommen (elektrisch) isolierenden und (optisch) durchsichtigen Medium:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + C^2 \nabla^2 \varphi_i = 0\,, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sum_1^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0\,, \quad \left(-\nabla^2 = \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}\right)$$

wo man unter φ_i im Elektromagnetismus z. B. die nach den drei Koordinatenaxen genommenen Komponenten des elektrokinetischen Moments oder die des Verschiebungsstromes, u. s. w., in der Elasticitätstheorie aber die Komponenten der mechanischen Verschiebung oder die der Rotation u. s. w., verstehen kann. C bedeutet aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen und ist einerseits durch $(K\mu)^{-\frac{1}{2}}$, andererseits durch $\left(\frac{B}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}$ gegeben. Würden nun sogar die beiden numerischen Werte von C in der elektromagnetischen und der elastischen Theorie von einander verschieden sein, so könnte man auch dann noch die entsprechenden elektromagnetischen Erscheinungen durch die rein mechanischen, und zwar, wie wir später sehen werden, wegen der Form der obigen Differentialgleichungen, auf unendlich vielfache Weise

modellieren; das Modell, der mechanische Bilderzug der veränderlichen elektromagnetischen Zustände, würde dann dem Originale vorauseilen oder aber hinter demselben zurückbleiben und in einem verkleinerten oder vergrösserten Mafsstabe verfertigt sein können; anders gesprochen, würde dies eben nur ein im optischen Äther entworfenes Modell des elektromagnetischen Feldes, nicht aber mit dem letzteren identisch sein. Nun zeigt es sich aber aus den experimentellen Untersuchungen, die in dieser Hinsicht angestellt wurden, dafs die beiden Werte von C (für elektromagnetische und Lichtwellen) mit einander, wenigstens in gewissen Medien, ziemlich gut übereinstimmen. Wird also die Gleichheit der Werte der Konstanten C in den beiden Fällen zugegeben, so kann man sagen, dafs nicht nur die beiden in Frage stehenden Klassen von Erscheinungen in ganz analoger Weise in den bezüglichen Gebieten verlaufen und dafs diese Gebiete koëxtensiv sind, sondern dafs die Erscheinungen auch bis auf die kleinsten Raumteile koëxistierend sind, d. h. der Zeit nach mit einander übereinstimmen. Diese Umstände hatten schon Maxwell veranlafst, das Licht als elektomagnetisches Phänomen aufzufassen; und auf diese Weise ist um das Jahr 1865 die elektromagnetische Lichttheorie, welche sich nun der gröfsten Vorteile erfreut, entstanden.

Obwohl nun schon Maxwell selbst ganz geneigt war, das elektromagnetische Medium mit einem elastischen lichttragenden Äther für eins zu halten[1]), und so die beiden Klassen von Erscheinungen, so zu sagen als zwei Seiten eines und desselben Dinges aufzufassen, so werden dennoch die beiden Lichttheorieen: die elektromagnetische und rein mechanische, aus Gründen von mehr specieller Natur bis an den heutigen Tag auseinander gehalten. Neuerdings hat z. B. Prof. Gibbs[2]) einen Vergleich der „elektrischen“ mit der Thomson'schen Schaumäther-Theorie des Lichtes angestellt; als Resultat des Vergleichs der beiden Theorieen, die durchaus

[1]) Vgl. z. B. Maxwell's „Lines of physical force“; Sc. Papers I. oder „Electr. u. Mgn.“, II. Kap. XX, XXI.

[2]) l. c.

nicht als identisch betrachtet werden, erscheint bei Gibbs ein Analogon der Verhältnisse der Geometrie: die reciproke Dualität[1]). Den wichtigsten Gegensatz der beiden Theorieen bildet nach ihm der Umstand, dafs während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in der Schaumäther-Theorie unendlich klein gegen die der Transversalwellen ist ($A : B$ unendlich klein), solle das nämliche Verhältnis in der „elektrischen" Theorie des Lichts unendlich grofs sein $\left(\sum_1^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0,\ \text{s. weiter unten}\right)$. — Die letztere Auffassung ist aber keineswegs notwendig. — Angesichts der Vorzüge der Schaumäther- vor der älteren Gallertäther-Theorie nennt sogar Gibbs die erstere „a serious rival" der elektromagnetischen Lichttheorie. Prof. Gibbs hofft auch, man könnte leicht ein „experimentum crucis" finden, welches uns in den Stand setzen würde, zwischen den beiden verglichenen Theorieen zu entscheiden, vorausgesetzt, dafs die optischen Phänomene von den theoretischen Ergebnissen in dem einen oder dem anderen Grenzfalle ($v_t : v_t$ — sehr klein, $v_t : v_t$ — sehr grofs) merklich differieren. Es mufs auch, wie mir scheint, zugegeben werden, dafs diese Hoffnung in einer sehr rationellen Weise mathematisch begründet ist. — Trotzdem aber ziehe ich es vor, anstatt einer „Dualität" nach einer Identität der mechanischen und elektromagnetischrn Lichttheorie und überhaupt der beiden in Frage stehenden Klassen von Erscheinungen zu streben.

Wollte man die elektromagnetischen Erscheinungen gar nicht als mechanische Änderungen eines materiellen Mediums auffassen, so würde es allerdings erlaubt sein, ganz unab-

[1]) Diese Dualität besteht in dem Folgenden: Die Verschiebungen $\mathfrak{E}$ in der mechanischen Theorie (nämlich der Schaumäther-Theorie) genügen denselben Differentialgleichungen und erfüllen dieselben Grenzbedingungen, wie die elektromotorischen Kräfte $\Phi\mathfrak{F}$, welche, in der elektromagnetischen Theorie, zur Unterhaltung der periodischen Änderungen der elektrischen Verschiebungen $\mathfrak{F}$ in einem Volumelemente nötig sind: genau ebenso entsprechen die elektrischen Verschiebungen $\mathfrak{F}$, in der elektromagnetischen Theorie, den mechanischen Kräften $\Psi\mathfrak{E}$, welche, in der mechanischen Theorie, zur Unterhaltung der Schwingungen $\mathfrak{E}$ nötig sind ($\Psi = \Phi^{-1}$, symbolisch).

hängig von der elektromagnetischen Theorie des Lichtes noch irgend eine mechanische Theorie einzuführen, welche die optischen Erscheinungen gut zu erklären im stande wäre. Und dann könnte man sehr wohl die beiden Theorieen des Lichts mit einander wetteifern lassen. Sucht man aber die elektromagnetischen Erscheinungen überhaupt auf rein mechanische zurückzuführen, so empfiehlt es sich offenbar, zu diesem Zwecke eben dasselbe hypothetische Medium zu verwenden, dessen man sich schon in der mechanischen Optik bedient. Sonst würde man zwei verschiedene hypothetische Media nötig haben. Wird also zugegeben, dafs der Thomson'sche Schaumäther den andern optischen Äthern vorzuziehen ist, so wird man namentlich den Schaumäther als Substrat der elektromagnetischen Erscheinungen zu betrachten haben. — Setzt man im Elektromagnetismus die Summe der partiellen Differentialquotienten der Komponenten des elektrokinetischen Moments nach den entsprechenden Koordinaten gleich Null, $\sum_1^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0$, und huldigt man zu gleicher Zeit, in der Elasticitätstheorie, den Ansichten Thomson's über die Konstitution des Äthers ($A : B$ — sehr klein, $\sum_1^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \neq 0$, ξ_i — Verschiebungskomponenten), so wird man natürlich einen deutlichen Kontrast der beiden Lichttheorieen erblicken müssen. Die Annahme: $\sum_1^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0$ ist aber im Elektromagnetismus keineswegs notwendig; läfst man also dieselbe fallen, so wird dadurch sofort die Möglichkeit gegeben, den elektromagnetischen Äther als Schaumäther aufzufassen. Ja, man wird, wie weiter unten gezeigt werden soll, gerade auf den Schaumäther, d. h. auf die Annahme: $A : B =$ einer sehr kleinen Zahl, systematisch geführt, falls man die elektromagnetischen Gleichungen als gegeben ansieht und mit denselben die Bewegungsgleichungen eines allgemeinen fest-elastischen Mediums, für welches nämlich die elastischen Konstantanten A, B noch in einem ganz willkürlichen Verhältnis zu einander stehen, vergleicht.

Hat man nun rücksichtlich der Beschaffenheit des elektromagnetischen Äthers bereits eine bestimmte Wahl getroffen, beachtet man aber dann nur die Differentialgleichungen der Bewegung —, zunächst in einem homogenen isotropen Mittel — so können die einzelnen elektromagnetischen Gröfsen, wie oben bemerkt, in unendlich vielfacher Weise in die Sprache der Mechanik übertragen werden, d. h. es sind unendlich viele Modelle (wir werden sehen, dafs sie im allgemeinen nur diesen Namen verdienen) des elektromagnetischen Feldes möglich und angebbar, und zunächst ist keines von ihnen den übrigen vorzuziehen. — Es sind auch wirklich jetzt schon viele solche Modelle bekannt. — Um nun irgend eine mechanische Interpretation aus dieser unendlichen Schaar herauszugreifen ohne ganz blind zu verfahren, mufs man notwendigerweise zunächst einen gewissen Ausgangspunkt wählen und noch irgend eine Forderung hinzufügen. So diente z. B. Sir W. Thomson als Ausgangspunkt für seine mechanische Interpretation der magnetischen Kraft ein Phänomen von sehr specieller Natur: die magnetische Drehung der Polarisationsebene eines Lichtstrahls. Und überhaupt könnte man ohne weiteres einen ganz beliebigen Ausgangspunkt wählen und eine in gewissen Grenzen willkürliche Forderung aufstellen. Es scheint mir aber am natürlichsten, den folgenden Weg einzuschlagen:

Zur mechanischen Deutung der zur Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen in Raum und Zeit dienenden Gröfsen (und umgekehrt) soll uns der Vergleich zweier Quantitäten führen, deren eine in allen Phänomenen im Gebiete des elektromagnetischen Feldes und deren andere ebenso in allen Erscheinungen des deformierten und erschütterten elastischen Äthers (und zwar des Schaumäthers) involviert ist.

Mit diesem Ausgangspunkte ist zugleich eine ganz bestimmte Forderung verbunden. Es ist nämlich kaum zu bemerken nötig, dafs wir unter den beiden zu vergleichenden Quantitäten die mechanische und die elektromagnetische Energie des deformierten und erschütterten Äthers, resp. des mit demselben koëxtensiven elektromagnetischen Feldes

verstehen. Denn die Energie ist es eben, die in einer jeden Erscheinung, sowohl auf der mechanischen Seite, als auch auf der elektromagnetischen, immer impliciert wird. Dadurch wird aber auch die Gleichberechtigung der unendlich vielen Interpretationen aufgehoben, weil die mechanische Energie E_m einerseits und die elektromagnetische E_e andererseits ganz bestimmte Funktionen gewisser Gröfsen sind.

Es seien x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, F_1, F_2, F_3 die nach den Koordinatenaxen genommenen Komponenten des elektrokinetischen Moments $\mathfrak{A}$, ψ das elektrostatische Potential, in diesem Punkte zur Zeit t, ferner $(K\mu)_1$, $(K\mu)_2$, $(K\mu)_3$ die Produkte der Hauptkapacitäten der elektrostatischen und der entsprechenden Hauptkapacitäten der magnetischen Induktion (Hauptpermeabilitäten) eines homogenen krystallinischen vollkommen isolierenden Dielektrikums, welches nach jeder Richtung hin sich ins Unendliche erstrecken mag. Schliefst man diejenigen Raumteile aus, in welchen sich fremde, etwa mit Elektricität geladene oder stromführende Körper befinden, die als Quellen des Feldes fungieren, so gelten zu jeder Zeit für jeden Punkt des übrigbleibenden Raumes die Maxwell'schen Differentialgleichungen:

$$(K\mu)_i \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\} + \nabla^2 F_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_1^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Die Ableitungen $-\partial\psi/\partial x_i$, $-\partial F_i/\partial t$ bedeuten die Komponenten der elektrischen Kraft, welche von ruhenden elektrischen Ladungen herrührt, resp. durch Änderung oder Bewegung von Strömen, Magneten u. s. w. induciert wird. Kümmert man sich aber nicht um den Ursprung der elektrischen Kraft und betrachtet man nur die Existenz derselben in einem gegebenen Punkte des Feldes, so empfiehlt es sich offenbar, das Zeitintegral von $\partial\psi/\partial x_i$ in F_i mitzubegreifen. Dies wird einerseits auf die Komponenten der magnetischen Induktion, $a_1 = \partial F_3/\partial x_2 - \partial F_2/\partial x_3$ etc., ohne Einfluſs sein, andererseits aber werden dann in $-\partial F_i/\partial t$ die Komponenten

der gesamten elektrischen Kraft gegeben sein. Die Gleichungen (1) können jetzt geschrieben werden:

$$(K\mu)_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} + \nabla^2 F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \quad (1)$$

Hierin wollen wir den Ausdruck $\Im = \sum_1^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ nicht, wie es gewöhnlich geschieht, gleich Null setzen. Differenziert man diese drei Gleichungen nach den bezüglichen x_i und addiert man die Resultate, so ergiebt sich zwar im Falle eines isotropen Dilektrikums $\partial^2 \Im / \partial t^2 = 0$, sodafs die Gröfse $\Im$ im speciellen für periodische Störungen in einem solchen von keinem Belange ist. In dem allgemeineren Falle eines krystallinischen Dielektrikums aber erhält man nur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_1^3 (K\mu)_i \frac{\partial F_i}{\partial x} = 0$, woraus gar nicht auf $\Im$ geschlossen werden kann. In der That wird auch bei Maxwell in der elektromagnetischen Theorie der Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen die Gröfse $\Im$ beibehalten[1]). Ebensowenig wird $\Im$ bei Mitberücksichtigung derjenigen Glieder, welche das Hall'sche Phänomen repräsentieren, vernachlässigt[2]). Ich will noch in einer Weise das Beibehalten des Gliedes $\partial \Im / \partial x_i$ in den obigen Gleichungen rechtfertigen: in der Ungewifsheit, ob $\Im$ als gleich Null oder aber von Null verschieden zu betrachten ist, setze man $(1-\lambda)\,\Im$ in (1) an Stelle von $\Im$ und verstehe unter λ eine unbestimmte Konstante; sucht man dann die Differentialgleichungen durch die rechtwinkligen Komponenten irgend einer periodischen Funktion von $\sum_1^3 l_i x_i - vt$ (wo $\Sigma l_i^2 = 1$ ist) zu befriedigen, so ergiebt sich für v^2, d. h. also für das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen, deren Wellennormale durch die Richtungscosinus l_i bestimmt ist, eine Gleichung von der Form:

---

[1]) „El. u. Mgn." Bd. II, Artt. 794—797.

[2]) S. z. B. Basset, „Physical Optics." p. 394.

$$\sum \frac{l_i^2}{v^2 - (K\mu)_i^{-2}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{1}{v^2};^{1})$$

soll nun daraus die bekannte Gleichung der Optik:

$$\Sigma l_i^2 (v^2 - a_i^2)^{-1} = 0$$

sich ergeben, so hat man $\lambda = 0$ zu setzen[2]); alsdann wird man aber genau auf die Form (1) der Differentialgleichungen geführt.

Wir fassen nun die Differentialgleichungen (1) des elektromagnetischen Feldes und die Abhängigkeit sämtlicher elektromagnetischer Gröfsen von den F_i und den elektrischen und magnetischen Konstanten als gegeben auf und fragen nach einem materiellen Gebilde, dessen Teilchen mit einander so verbunden wären, dafs die allgemeinsten Deformationen und Bewegungen desselben, in jedem noch so kleinen Zeit- und Raumteile, Gleichungen von der Form (1) gehorchen, wobei

---

1) Diese Gleichung erhält man ohne jeden Kunstgriff, indem man in (1) $F_i = \lambda_i \cdot e^{\sqrt{-1} \cdot c \Sigma l_i x_i - v \cdot t}$ setzt, wo c eine Konstante und λ_i die Richtungscosinus des resultierenden elektrokinetischen Moments $\mathfrak{M}$ sind. Bezeichnet man der Kürze wegen $(K\mu)_i$ mit a_i^{-2}, so ergiebt sich:

(a) . . . . . $\lambda_i a_i^{-2} v^2 = (\lambda - 1) l_i \Sigma (l_i \lambda_i) + \lambda_i,\ i = 1, 2, 3;$

multipliciert man eine jede dieser drei Gleichungen mit dem entsprechenden l_i und addiert sie, so folgt:

(b) . . . . . $v^2 \Sigma l_i \lambda_i a_i^{-2} = \lambda \Sigma l_i \lambda_i.$

Die Gleichungen (a) können auch geschrieben werden:

$$\lambda_i a_i^{-2} (v^2 - a_i^2) = (\lambda - 1) l_i \Sigma l_i \lambda_i,\ i = 1, 2, 3,$$

addiert man diese drei Gleichungen nach Multiplikation mit den entsprechenden Ausdrücken $l_i (v^2 - a_i^2)^{-1}$, so resultiert:

(c) . . . . . $\Sigma l_i \lambda_i a_i^{-2} = (\lambda - 1) \cdot \Sigma l_i \lambda_i \cdot \Sigma l_i^2 (v^2 - a_i^2)^{-1},$

und schliefslich ergiebt sich nach Division der Gleichung (c) durch die Gleichung (b):

$$(\lambda - 1) \cdot \lambda - 1 \cdot \Sigma l_i^2 (v^2 - a_i^2)^{-1} = v^{-2},$$

oder

$$\Sigma l_i^2 (v^2 - a_i^2)^{-1} = \lambda \cdot (\lambda - 1)^{-1} \cdot v^{-2}.$$

2) Oder wenigstens sehr klein im Verhältnis zu $(K\mu)^{-1}$ anzunehmen.

an die Stelle von F_i die rechtwinkligen Komponenten irgend eines Vektors, jedoch nur aus dem Gebiete der reinen Mechanik, treten können. Ein solches Gebilde finden wir unter den kontinuierlichen elastischen Körpern von homogener Struktur. Führt man die Green'schen Konstanten A, B ein, und sieht man, ebenso wie in Lord Rayleigh's Lichttheorie (s. p. 8), die Anisotropie als lediglich nur durch die Verschiedenheit der Dichte ϱ je nach der Richtung bedingt an, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung eines durch ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, A, B charakterisierten elastischen Mediums:

$$\varrho_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + B \nabla^2 \xi_i + (B - A) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad . \quad (2)$$

wo ξ_i die Verschiebungskomponenten im Punkte x zur Zeit t sind. In Bezug auf die Variablen sind diese Gleichungen genau von derselben Form wie die elektromagnetischen Differentialgleichungen (1). Denkt man sich nun die Verhältnisse der für ein elastisches Medium charakteristischen Koëfficienten ϱ, B, A stetig variieren, so ändern sich die Eigenschaften oder die Konstitution des Mediums allmählich; fafst man also die Verhältnisse dieser Gröfsen als noch ganz unbestimmt auf, so sind in (2) die Bewegungsgleichungen irgend eines der unendlich vielen elastischen Medien enthalten, welche mit den verschiedensten Eigenschaften ausgestattet sein können. Aus dieser unendlichen Schaar greife ich nun dasjenige Medium heraus, dessen Bewegungsgleichungen nicht nur in Bezug auf die Differentiationen nach den Variablen x, t, sondern auch in Bezug auf die Verhältnisse der Koëfficienten mit den elektromagnetischen Gleichungen (1) vollkommen übereinstimmen. In (1) sind die Koëfficienten von ∇^2 und $\frac{\partial}{\partial x_i} \sum$ unter einander gleich; man hat also auch für das gesuchte Medium das Verhältnis der entsprechenden Koëfficienten $(B-A) : B$ gleich 1 zu setzen, d. h. A sehr klein im Verhältnis zu B anzunehmen; ferner ergiebt sich für das Verhältnis der Koëfficienten bei $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ und ∇^2 der Wert $\varrho_i B^{-1} =$

$(K\mu)_i = v_i^{-2}$ [1]). In dem gesuchten Medium würden sich also Transversalwellen mit der Lichtgeschwindigkeit, Dilatationswellen aber mit einer im Verhältnis zur letzteren sehr kleinen Geschwindigkeit $(A^{1/2}\varrho^{-1/2})$ ausbreiten. Das ist aber nichts Anderes als der quasi-labile oder Schaumäther der Thomson'schen Lichttheorie. Hiermit ist die Beschaffenheit des gesuchten materiellen Mediums, welches zur mechanischen Deutung des elektromagnetischen Feldes dienen soll, unzweideutig bestimmt.

Jetzt genügen die Komponenten ξ_i der elastischen Verschiebung einerseits und F_i, die des elektrokinetischen Moments, andererseits ein und demselben Differentialgleichungssysteme:

$$v_i^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \nabla^2 \varphi_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

dies sind aber lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koëfficienten; sie werden also ebenfalls von den unendlich vielen Funktionen φ_i^e, φ_i^m elektromagnetischer, resp. mechanischer Natur befriedigt, welche einerseits aus den F_i, andererseits aber aus den ξ_i durch beliebig oft wiederholte Differentiation nach der Zeit und den Koordinaten, Addition und Multiplikation mit konstanten Koëfficienten in bekannter Weise entstehen. Setzt man nun irgend eine dieser unendlich

---

[1]) Die Dimensionen von $B\varrho i^{-1}$ sind in der That, ebensowohl wie die von $(K\mu)i^{-1}$ in dem elektromagnetischen oder dem elektrostatischen Maſssysteme, gleich denen des Quadrats einer Geschwindigkeit. Denn die Dimensionen der Rigidität sind

$$[B] = \left[\frac{MX_1T^{-2}}{X_1X_2} : X_1X_3^{-1}\right] = \left[\frac{MX_2^{-1}T^{-2}}{X_1X_3^{-1}}\right];$$

also $[B\varrho^{-1}] = [BM^{-1}X_1X_2X_3] = [X_3T^{-1}]^2$, wenn wir nach dem Vorgange von Williams (Proc. of Phys. Soc. Lond.; Okt. 1892) die Längeneinheiten X_1, X_2, X_3 in Richtung der drei Koordinatenaxen in den Dimensionsformeln nicht mit einander verwechseln, sodaſs in unserem Falle z. B. die Richtung der Fortpflanzung der Schwingungen in Bezug auf die Richtung der Deformation in den Formeln auch zum Ausdruck kommt.

vielen elektromagnetischen Gröfsen irgend einer der unendlich vielen mechanischen Gröfsen gleich oder proportional:

$$\varphi_{\overset{e}{i}} = c \,.\, \varphi_{\overset{m}{i}}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

(wobei man die Dimensionen der Konstanten c so aus Zeit, Länge und Masse zusammenzusetzen hat, dafs die Dimensionen der beiden Seiten dieser Gleichung mit einander übereinstimmen) und bestimmt man K_i, μ_i durch B, ϱ_i in irgend einer Weise, so jedoch, dafs die früher gewonnenen Gleichungen: $(K\mu)_i = \varrho_i B^{-1}$ erfüllt seien, so kann man mit Hilfe der bekannten Beziehungen, welche zwischen dem grade herausgegriffenen φ_e und den übrigen Gröfsen des Elektromagnetismus stattfinden, auch diese letzteren sämtlich durch rein mechanische Gröfsen eindeutig ausdrücken, und somit eine ganz bestimmte mechanische Deutung, ein mechanisches Modell des elektromagnetischen Feldes erhalten. Und weil uns beliebig viele Funktionen φ_e, φ_m zur Verfügung stehen, so können wir beliebig viele Gleichungen von der Form (4) ansetzen und folglich beliebig zahlreiche (eine unendliche zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit) mechanische Modelle des Feldes ohne jede Schwierigkeit konstruieren. Obwohl wir also schon ein bestimmtes Baumaterial, nämlich den Schaumäther (ein aus der unendlichen Schaar $[A, B, \varrho_i]$ herausgegriffenes Medium $[o, B, \varrho_i]$), vor den Augen haben, so können wir doch die Bewegungen und Deformationen desselben in unendlich vielfacher Weise den Störungen des elektromagnetischen Feldes (mittels irgend einer Gleichung (4)) zuordnen; solange wir lediglich nur die Differentialgleichungen (3) berücksichtigen, haben sämtliche Modelle, welche man demgemfs erhält, das nämliche Recht, die elektromagnetischen Erscheinungen konsequent mechanisch zu deuten.

Wir wollen nunmehr aus dieser unendlichen Schaar der Schaummodelle des Feldes dasjenige (falls nur ein solches möglich ist) herausgreifen, welches von den anderen sich dadurch unterscheidet, dafs es eine der elektromagnetischen Energie zu jeder Zeit und in jedem noch so kleinen Raumteile gleiche mechanische Energie der Deformation und Be-

wegung der daselbst befindlichen Ätherteilchen liefert. Bei dieser Wahl werden wir anstatt des Verhältnisses von Bild zu Original einfach eine Identität haben: das veränderliche elektromagnetische Feld und das System der Deformationen und Bewegungen des Schaumäthers werden nur noch zwei verschiedene Erscheinungsformen ein und derselben Energie sein. Um dies zu erreichen, ist es nur nötig, die Gleichungen (4) so zu wählen, dafs daraus die Gleichheit der beiden Energieformen der Quantität nach für jedes Wertesystem x_i, t folge. Zunächst müssen also die beiden allgemeinen Ausdrücke für die Energie, E_m und E_e, aufgestellt werden.

Die Anisotropie des Schaumes hatten wir bereits auf seine Dichte geworfen; wir erhalten also die potentielle Energie des deformierten Schaumes, indem wir in der Greenschen Formel[1]) für isotrope Media die mit A multiplicierten Glieder gegen die mit B multiplicierten vernachlässigen; dabei sollen, in einer ersten Annäherung, die Glieder von der vierten Dimension noch nicht eingeführt werden; fügen wir die lebendige Kraft der bewegten Teilchen hinzu und integrieren über das unendliche Volumen des Schaumes, so ergiebt sich für die gesamte mechanische Energie der elastischen Deformation und Bewegung der Ausdruck:

$$E_m = \frac{1}{2}\int\Big\{\sum \varrho_i\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right)^2 + B\sum\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)^2 - 4B\sum\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\Big\}d\tau, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wo die Summationen über die Indices $i = 1, 2, 3$ und $i, j = 1, 2$; 2, 3; 3, 1 zu erstrecken sind.

Bezeichnet man, andererseits, die Komponenten der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ mit P_i, die der magnetischen $\mathfrak{H}$ mit α_i, und nimmt man erfahrungsmäfsig an, dafs die Abhängigkeit der Gröfse $v^{-2} = (K\mu)$ von der Richtung lediglich durch K, nicht durch μ, bedingt ist, so kann die gesamte im unendlich aus-

[1]) Green, Papers, p. 253.

gedehnten Dielektrikum aufgespeicherte elektromagnetische Energie in der Form:

$$E_e = \int \left\{ \frac{1}{8\pi} \sum K_i P_i^2 + \frac{\mu}{8\pi} \sum \alpha_i^2 \right\} d\tau \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

ausgedrückt werden; wegen der Beziehungen:

$$P_i = -\frac{\partial F_i}{\partial t} \text{ und } \mu \alpha_1 = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \text{ etc.}$$

geht diese Formel über in:

$$E_e = \int \left\{ \frac{1}{8\pi} \sum K_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{\mu^{-1}}{8\pi} \sum \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\} d\tau. \quad (7)$$

Die zweite Summe in diesem Ausdrucke transformieren wir nun unter der Voraussetzung, dafs sämtliche Quellen des (oben verallgemeinerten) elektrokinetischen Moments $\mathfrak{A} = (\Sigma F_i^2)^{1/2}$ im Endlichen sich befinden. Es ist z. B.:

$$\int \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right)^2 d\tau = \int \left\{ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right)^2 \right\} d\tau - 2 \int \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_3} d\tau;$$

für das letzte Integral können wir schreiben:

$$\iiint \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = - \iint \overline{F_3 \frac{\partial F_2}{\partial x_3}}^{x_2 = +\infty}_{x_2 = -\infty} \cdot dx_1 dx_3 +$$

$$+ \iiint \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = - \iiint F_3 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= - \iiint F_3 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 + \iint \overline{\frac{\partial F_2}{\partial x_2} F_3}^{x_3 = +\infty}_{x_3 = -\infty} \cdot dx_1 dx_2$$

$$= \iiint \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3,$$

weil jedes der beiden hinzugefügten Flächenintegrale der eben gemachten Annahme zufolge strenge gleich Null ist, sobald man die Integrationen über die Oberfläche einer Kugel, z. B., mit unbegrenzt wachsendem Radius R erstreckt. Die

Gröfsen F werden nämlich unendlich klein wie R^{-1} und $\frac{\partial F}{\partial x}$ wie XR^{-3} (wo X eine ins Unendliche wachsende Länge in der Richtung x bedeutet), oder wie R^{-2}; die Proukte $F\frac{\partial F}{\partial x}$ werden also unendlich klein wie R^{-3}, während der Flächeninhalt der Kugel nur wie R^2 unendlich grofs wird. Es ergiebt sich also:

$$\int\left\{\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right\}^2 d\tau=\int\left\{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)^2\right\} d\tau-2\int\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\,d\tau$$
$$=\int\left\{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}+\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)^2-4\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right\} d\tau;$$

und analoge Ausdrücke gelten für die beiden anderen entsprechenden Integrale, in welchen die Indices 3, 1 und 1, 2 vorkommen. Darnach geht die Formel (7) für die elektromagnetische Energie über in:

$$E_e=\frac{1}{2}\int\left\{\sum\frac{K_i}{4\pi}\left(\frac{\partial F_i}{\partial t}\right)^2+\frac{\mu^{-1}}{4\pi}\sum\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}+\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)^2\right.$$
$$\left.-4.\frac{\mu^{-1}}{4\pi}\sum\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}\right\} d\tau. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Dieser Ausdruck der elektromagnetischen Energie E_e ist aus den F_i in ganz derselben Weise gebildet, wie der Ausdruck (5) der mechanischen Energie E_m aus den ξ_i. Was die elektromagnetischen und die elastischen Konstanten und die Dichte anbelangt, so ist schon oben $K_i\mu=\varrho_i B^{-1}$ gesetzt worden; nach der Schaumäther-Theorie des Lichts wird das verschiedene Brechungsvermögen optisch verschiedener Medien dnrch verschiedene Dichten ϱ bedingt, während B überall einen und denselben Wert hat; andererseits aber ändern sich auch beim Übergang von einem Dielektrikum zu einem anderen die elektrischen Konstanten K, während μ merklich denselben Wert beibehält. Es sollen nun die drei Beziehungen (4) zwischen sechs Funktionen φ_i^e, φ_i^m $(i=1, 2, 3)$, welche den Differentialgleichungen (3) zu genügen haben, so gewählt werden, dafs die Ausdrücke unter den Integralzeichen in (8)

und (5) einander identisch gleich seien. Um diesen Forderungen sämtlich Genüge zu leisten, haben wir einfach die Beziehungen (4) direkt zwischen den F_i und den ξ_i (als φ_i^e und φ_i^m) aufzustellen, also einfach

$$F_i = c\,\xi_i,\ i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \quad (9)$$

und zugleich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu^{-1}}{4\pi} &= \frac{1}{c^2}\,\mathrm{B};\ \mu = \frac{c^2}{4\pi}\,\mathrm{B}^{-1}, \\ \frac{\mathrm{K}_i}{4\pi} &= \frac{1}{c^2}\,\varrho_i;\ \mathrm{K}_i = \frac{4\pi}{c^2}\,\varrho_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3 \ldots . \quad (10)$$

zu setzen. — Auf diesem Wege haben wir systematisch eine vollständig bestimmte mechanische Deutung des elektromagnetischen Feldes, zunächst in einem vollkommen isolierenden Dielektrikum, gewonnen. Die Frage ob (9) und (10) die einzigen Gleichungen sind, welche — bei Benutzung des Schaumäthers als Baumaterials — sämtlichen oben aufgestellten Forderungen Genüge leisten, wollen wir dahingestellt lassen. — In dieser Hinsicht übrigens kann ein jedes der unendlich vielen Modelle, deren mehrere bis an den heutigen Tag bereits veröffentlicht worden sind[1]) ohne Schwierigkeit geprüft werden. —

---

[1]) S. z. B. Glazebrook, Phil. Mag. June, 1881: „On the vortex theory of elmgn. action", wonach der Äther in Leitern wie eine zähe Flüssigkeit, in Dilektricis aber wie ein kontinuierliches fest-elastisches inkompressibles Medium sich verhält und $K\mu = \varrho B^{-1}$; $K = B^{-1/2}c$, $\mu = 2c\varrho$, $F_i = c\varrho\,\partial\xi_i/\partial t$ ist; F_i und $\varrho\,\partial\xi_i/\partial t$ genügen in der That, auch in krystallinischen Körpern, ein und denselben Differentialgleichungen; es wird jedoch die Bedingung $E_e = E_m$ offenbar nicht erfüllt. Vgl. dies mit Maxwell's diskontinuierlichem aus Zellen und „idle wheels" zusammengesetztem Modell; Lines of phys. forces, 1861/2. Sc. Papers, I.; Glazebrook's Grundformeln sind dieser geistreichen Abhandlung entlehnt; bei Maxwell besitzt aber das Medium eine ganz andere Struktur und die Gleichung $E_e = E_m$ wird allerdings in nicht zu kleinen Raumteilen befriedigt. — A. Sommerfeld, Wied. Ann. Bd. 46 pp. 139—150, nimmt in seiner „Mech. Darstellung d. elmgn. Erscheinungen in ruhenden Körpern" einen Äther an, welcher in Leitern die Eigenschaften einer zähen Flüssigkeit, in Nichtleitern die eines quasi-rigiden Körpers besitzt (Halbleiter werden als Nichtleiter mit eingelagerten leitenden Teilchen, oder umgekehrt, aufgefafst); seine Annahmen $\mu = \varrho/\varrho_m$,

Verbindet man aber die elektromagnetischen Konstanten mit den elastischen und der Dichte mittels der Gleichungen (10), so ist unter diesen Umständen in (9) jedenfalls die einzige Lösung unseres Problems enthalten. (Würde man das Postulat der Identität von E_e und E_m, welches uns als Ausgangspunkt diente, fallen lassen, so würden augenscheinlich sogar bei Annahme der Gleichungen (10) unendlich zahlreiche Modelle in gleicher Weise möglich sein.)

Den Beziehungen (9) und (10) gemäfs sollen nunmehr sämtliche Begriffe, deren man sich in dem Elektromagnetismus bedient, in die Sprache der reinen Mechanik übertragen werden. Dabei mag c, die Übersetzungskonstante, negativ sein.

Das elektrokinetische Moment $\mathfrak{A}$ ist der elastischen Verschiebung ξ ($\xi^2 = \Sigma \xi_i^2$) des Schaumäthers in dem gegebenen Punkte x proportional und hat die gerade entgegengesetzte Richtung:

$$\mathfrak{A} = c\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die magnetische Permeabilität ist der Rigidität des Schaumes umgekehrt, die dielektrische induktive Capacität, in irgend einer Richtung der Dichte des Schaumes in eben derselben Richtung direkt proportional. (S. Gl. (10).) — Die Bedingung für die Stabilität des quasi-labilen Äthers ist $B > o$; andererseits wissen

---

$K = B/B_o$, $a_i = -\frac{\varrho}{\varrho_o}\sqrt{4\pi\varrho_o}\cdot\partial\xi_i/\partial t$ (a_i sind die Komponenten der magnetischen Induktion, ϱ_o, B_o beziehen sich auf den freien Äther) ergeben sofort $E_e = E_m$; in dem Falle eines krystallinischen Mediums, wo μ eine skalare Konstante, K aber von der Richtung abhängig ist, würden die den a_i gleichgesetzten Funktionen gar nicht dieselben Differentialgleichnungen wie die a_i befriedigen; das Modell von Sommerfeld ist also für krystallinische Media nicht brauchbar; es wird hier auch Inkompressibilität des Äthers vorausgesetzt. Ebenso bei Helm, Wied. Ann., Bd. 47, pp. 743—751: „Die Fortpflanzung der Energie durch den Äther", wo die Beziehungen zwischen den elektromagnetischen und mechanischen Grössen im übrigen nach Einführung der F_i sich auf unsere Formeln (9), (10) zurückführen lassen; Herr Helm bildet sich aber eine eigentümliche Vorstellung von dem Zustandekommen der elektromagnetischen Energie E_e, die er keineswegs als mit der mechanischen Energie E_m des deformierten und erschütterten Äthers identisch auffasst, während die Gleichung $E_e \equiv E_m$ grade den Ausgangspunkt und das Postulat in der vorliegenden Abhandlung bildet. —

wir aber aus dem Elektromagnetismus, dafs die magnetische Permeabilität $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ in jedem Falle auch positiv ist; wenigstens kennt man keine einzige Substanz, für welche der Magnetisierungskoëfficient $\varkappa$ einen numerisch grösseren als $\frac{1}{4}\pi$ und zugleich negativen Wert hätte.[1]) Für die Stabilität des elektromagnetischen Feldes ist es also nur nötig, der Konstanten c^2 in (10) einen positiven Wert beizulegen oder (was übrigens von vornherein klar ist) c als reelle Gröfse aufzufassen. — In isotropen Medien ist K ebenso wie ϱ eine Skalargröfse. — Die Dimensionen der Konstanten c können je nach dem gewählten Mafssysteme der elektromagnetischen Gröfsen immer entsprechend festgesetzt werden. Beispielsweise kann auch c als reine Zahl betrachtet werden; dann würden die Dimensionen des elektrokinetischen Moments die einer Länge, der elektrischen Kraft die einer Geschwindigkeit (Translations-Geschwindigkeit) sein, und so weiter.

Ein Blick auf die Formeln (8) und (5) lehrt, dafs nach (9), (10) die elektrische Energie des Feldes als die kinetische Energie des Äthers, und die magnetische Energie des Feldes (die beiden Summen in (8) mit dem Faktor $\mu^{-1}/8\pi$) als die potentielle Energie der elastischen Deformation des Äthers aufzufassen ist. Wird z. B. das Feld lediglich nur durch unbewegte elektrische Ladungen erzeugt, sodafs die magnetische Kraft überall verschwindet, so würde hiernach die elektrostatische Energie, welche in diesem Falle die Gesamtenergie des Feldes ausmacht, gleich der kinetischen Energie der irrotationalen Bewegung des Schaumes sein; andererseits würde der durch strömende Elektricität erzeugten magnetischen Energie die potentielle Energie der elastischen rotationalen Deformation des Äthers entsprechen. Dieser Umstand wird aber keineswegs überraschend wirken, wenn man bedenkt, dafs den Begriffen der ruhenden Elektricität und der bewegten Elektricität nicht gerade die Begriffe ruhender, resp. bewegter Materie zu entsprechen brauchen. Wir werden vielmehr im Folgenden sehen, dafs gemäfs (9) und (10) einem ruhenden

[1]) Maxwell. „El. u. Mgn.“ Bd. II. Kap. IV.

Systeme elektrisierter Körper ein kinetischer Vorgang im Äther, nämlich eine stationäre (irrotationale) Bewegung entspricht, Einer mit der Zeit sich nicht ändernden irrotationalen Deformation des Schaumes entspricht weder elektrische, noch magnetische Energie; denn in diesem Falle sind sowohl die Glieder $\partial F_i/\partial t$ als auch $\partial F_j/\partial x_i - \partial F_i/\partial x_j$, in dem Ausdrucke (7) der elektromagnetischen Energie E_e, sämtlich gleich Null. Eine irrotationale unveränderliche Deformation des Schaumes wird also in dem elektromagnetischen Felde überhaupt gar nicht wahrgenommen. Wir hatten aber auch den einer solchen Deformation entsprechenden Teil der potentiellen Energie des Schaumäthers: $A\left(\Sigma \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right)^2$ gegenüber den mit B multiplicierten Gliedern zweiten Grades vernachlässigt.

Für die Komponenten P_i der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ erhält man nach (9)

$$P_i = -\frac{\partial F_i}{\partial t} = -c\frac{\partial \xi_i}{\partial t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

d. h.: die elektrische Kraft ist der Verschiebungsgeschwindigkeit des Äthers in dem gegebenen Punkte direkt proportional und wirkt in der Richtung derselben:

$$\mathfrak{E} = -c\dot{\xi}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die elektrischen Kraftlinien sind demnach Stromlinien; in dem Falle eines stationären Feldes geben dieselben die wirklichen Bahnen der Schaumteilchen an.

Für die Komponenten a_i der magnetischen Induktion haben wir:

$$a_i = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = c\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}\right) = 2c\cdot\omega_i, \quad \ldots \quad (14)$$

wo $-\omega_i$ die rechtwinkligen Komponenten der Drehung ω bedeuten. Die magnetische Induktion wirkt in jedem Punkte des Feldes in der Richtung der lokalen Drehungsaxe und ist der Drehung des daselbst befindlichen Ätherteilchens aus seiner neutralen Gleichgewichtslage direkt proportional:

$$\mathfrak{B} = 2c\cdot\omega. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Die magnetischen Induktionslinien und Induktionsröhren sind demnach nichts Anderes, als in dem Äther gebildete Wirbellinien und Wirbelfäden.[1]) Bezeichnet man den Querschnitt eines schon vollständig ausgebildeten Wirbelfadens mit q, so folgt aus

$$\sum \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0,$$

dafs $q\omega$ längs des ganzen Wirbelfadens, oder die magnetische Induktion $q\mathfrak{B}$ durch den Querschnitt einer fertigen Induktionsröhre an jeder Stelle derselben einen und denselben Wert haben mufs. Mit der Zeit kann sich aber das Produkt $q\omega$ also auch qB beliebig ändern.

Im Zusammenhange damit wollen wir an dieser Stelle die folgende Bemerkung einschalten: — Ebenso wie wir in einer früheren Abhandlung[2]) die allerdings von der Maxwellschen Theorie nicht unabhängige Annahme gemacht haben, dafs irgend eine elektrische Induktionslinie nicht instantan in ihrer ganzen Länge ausgebildet wird, sondern dafs vielmehr der entsprechende „Zwangszustand“ in Richtung der Induktionslinie mit einer endlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in dem Dielektrikum fortgepflanzt wird, ebenso wollen wir jetzt auch annehmen, dafs eine jede magnetische Induktionslinie oder die mit derselben kongruente Wirbellinie ihrer Länge nach von der Quelle der Induktion aus mit einer endlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$ im Schaumäther ausgebildet wird, und dafs ebenso nach Zerstörung der Quelle die Induktionslinie in je einer Sekunde um das Stück $\mathfrak{v}_m$ kürzer wird. Diese Bemerkung kann nun auf das Obige angewandt werden. Ist eine magnetische Induktionslinie oder Wirbellinie bereits fertig und erfährt dieselbe keine zeitlichen Änderungen, so wird ihre ganze Energie (mechanisch-) potentiell oder magnetisch sein. Dann

[1]) „Wirbellinie“, „Wirbelfaden“ u. s. w. sind hier ebenso wie in der Hydrodynamik zu definieren mit dem Unterschiede jedoch, dafs an Stelle der Drehungsgeschwindigkeit hier die Drehung (der Drehungswinkel) selbst tritt.

[2]) „Über die Bewegung eines elektrischen Körpers in einem Dielektrikum.“ Wied. Ann. Bd. 48. 1893. p. 269.

ist ein jedes Schaumteilchen in derselben um einen gewissen Winkel ω aus seiner neutralen Lage gedreht, und ein aus solchen Linien gebildeter Wirbelfaden oder eine magnetische Induktionsröhre wird entweder in sich selbst zurücklaufen oder aber an der Begrenzung des Schaumes Anfang und Ende haben. Wird dagegen eine Wirbellinie oder magnetische Induktionslinie von einem Punkte A aus erst, nach beiden Seiten, ausgebildet, so ist ein Teil der Energie potentiell oder magnetisch und der übrigbleibende kinetisch oder elektrisch; weil nämlich die Teilchen erst nach und nach die entsprechenden Endwerte ω der Drehung erreichen, so müssen sie sich unterdessen drehen und also gewisse Geschwindigkeiten ξ besitzen[1]), d. h. es werden elektrische Kräfte auftreten. Hat der magnetische Induktionsfaden zur Zeit $t = 0$ in dem Punkte A sich auszubilden angefangen, so werden wir zur Zeit t, ehe noch der Faden fertig ist, nach beiden Seiten von A zwei Stücke AB und AB' desselben, je $v_m \cdot t$ cm lang, haben, in welchen die ganze Energie potentiell oder magnetisch sein wird; die beiden Enden B, B', wo noch die Teilchen sich drehen, werden aber von zwei Systemen elektrischer Induktionslinien, wie von Kapseln, umhüllt sein. Indem der Wirbelfaden sich schliefst oder beiderseits die Begrenzung des Äthers erreicht und das Wertesystem der ω nicht mehr geändert wird, fallen auch diese elektrischen Kapseln fort, und nun ist die ganze Energie des Fadens potentiell oder magnetisch. (Bei der Ausbildung elektrischer Induktionslinien findet dieses Raisonnement keine Anwendung.) Die Annahme, dafs v_m endlich sei, kann direkt auf die folgende gestützt werden: — Wird ein Ätherteilchen um irgend eine Axe gedreht, so mufs der Drehungswinkel ω erst einen gewissen Wert erreichen, ehe die Drehung einem nächstliegenden Teilchen mitgeteilt wird.

Betrachtet man die Gleichungen (13) und (15), so ersieht man sofort, dafs durch zeitliche Änderung der magnetischen

[1]) Unter der Annahme, dafs diese Vorgänge in Bezug auf die Zeit stetig sind.

Induktion $\mathfrak{B}$, d. h. durch zeitliche Änderung der Drehungswinkel ω, elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ erzeugt wird; besser ausgedrückt: eine in der Zeit veränderliche magnetische Induktion mufs ebenso von einer elektrischen Kraft wie eine stetig veränderliche Drehung von einer Verschiebungsgeschwindigkeit begleitet werden.

Für die Komponenten f_i der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ ergiebt sich aus (9), (10) und (12):

$$f_i = \frac{K_i P_i}{4\pi} = -\frac{1}{c}\varrho_i \dot{\xi}_i, \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

und daraus folgt unmittelbar für die Komponenten $\bar{u}_i$ des elektrischen Verschiebungsstromes $\dot{\mathfrak{D}}$:

$$\bar{u}_i = \dot{f}_i = -\frac{1}{c}\cdot\varrho_i\ddot{\xi}_i; \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

die ersteren sind also den entsprechenden Komponenten des auf eine Volumeneinheit des Äethers berechneten Bewegungsmoments direkt proportional und mit denselben gleichgerichtet, und die letzteren verhalten sich ebenso zu den Komponenten X_i der, auf eine Volumeinheit bezogenen, ein Volumelement des Äthers angreifenden mechanischen Kraft X, sodafs

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{1}{c}X \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

wird. Diese Kraft $X = (\Sigma X_i^2)^{1/2}$ ist die Resultante der durch Deformation des Schaumäthers wachgerufenen elastischen Normal- und Tangentialkräfte: X_{11}, X_{22}, X_{33}, $X_{12} = X_{21}$, $X_{23} = X_{32}$, $X_{31} = X_{13}$. Dieses Ergebnis können wir verificieren, indem wir die Komponenten X_i der Kraft X, — in einer wohlbekannten Weise, — wirklich ausrechnen. Es ist z. B.:

$$X_1 = \frac{\partial X_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial X_{13}}{\partial x_3},$$

$$X_{11} = A\sum\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} - 2B\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right), \quad X_{12} = B\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right),$$

$$X_{13} = B\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}\right);$$

vernachlässigt man nun hierin A gegen B und giebt man den ξ_i und der Rigidität B ihre elektromagnetischen Bedeutungen nach (9), (10), so folgt:

$$X_1 = \frac{c^2\mu^{-1}}{4\pi c}\left\{-2\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right\}$$
$$= \frac{c\mu^{-1}}{4\pi}\left\{\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right\} = -\frac{c\mu^{-1}}{4\pi}\left\{\nabla^2 F_1 + \frac{\partial \Im}{\partial x_1}\right\};$$

der eingeklammerte Ausdruck ist aber nach Maxwell's Formel[1]) gleich $4\pi\mu\bar{u}_1$, also wird in der That $X_i = -c\bar{u}_i$.

Die Richtung der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in einem anisotropen Dielektrikum fällt, im allgemeinen, nur mit der Richtung des Bewegungsmomentes, nicht aber mit der der Geschwindigkeit der Ätherteilchen zusammen; ebenso bildet der elektrische Verschiebungsstrom $\dot{\mathfrak{D}}$ mit der Beschleunigung derselben einen im allgemeinen von Null verschiedenen Winkel, obwohl er mit der Resultierenden X der elastischen Kräfte der Richtung nach überall zusammenfällt, sodafs die elektrischen Stromlinien (Linien des Verschiebungsstromes $\dot{\mathfrak{D}}$) mit den elastischen Kraftlinien identisch sind.

Dividiert man die Komponenten a_i der magnetischen Induktion durch μ, so erhält man die Komponenten der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$:

$$\alpha_i = \mu^{-1} \cdot 2c\omega_i = \frac{8\pi}{c} B\omega_i, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

sodafs $\mathfrak{H}$ dem Produkte aus Rigidität und Drehung direkt proportional ist und, falls μ wirklich eine skalare Konstante bedeutet, in der Richtung der lokalen Drehungsaxe wirkt.

Für die Flächendichte σ der wahren Elektricität an der Grenzfläche zweier dielektrischer Medien ergiebt sich aus (16):

$$\sigma = \Sigma l_i f_i + \Sigma l_i' f_i' = \Sigma l_i (f_i - f_i') = -\frac{1}{c}\Sigma l_i (\varrho_i \dot{\xi}_i - \varrho_i' \dot{\xi}_i'), \quad (20)$$

wo l_i, l_i' $(i = 1, 2, 3)$ die Richtungscosinus der nach beiden

---

[1]) „El. und Magn.", Bd. II, Art. 618 (Gl. E.).

Seiten der Trennungsfläche gezogenen Normalen ($l_i = -l'_i$), $\dot{\xi}_i$, $\dot{\xi}'_i$ und ϱ_i, ϱ'_i die Verschiebungsgeschwindigkeiten und die Dichten des Äthers in den beiden Medien bedeuten. Die räumliche Dichte der wahren Elektricität in einem Punkte x ist:

$$\varepsilon = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{c} \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho_i \dot{\xi}_i) \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Die beiden letzten Formeln liefern uns ein anschauliches mechanisches Bild der Verhältnisse der Elektrostatik. Der kürzeren Ausdrucksweise halber möge die dielektrische induktive Kapacität K, also auch die Ätherdichte ϱ, von der Richtung unabhängig sein. Dann ist die Summe $-\sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho \dot{\xi}_i)$ einfach der auf eine Volumeinheit berechnete Überschufs in ein bei x befindliches Raumelement während einer Sekunde hineinströmenden über die aus demselben in dieser Zeit herausströmenden Schaummasse. Die Raumdichte ε der wahren Elektricität ist also der letzteren Gröfse direkt proportional. Da c negativ gewählt worden ist, so wird aus einem positiv geladenen Raumelemente mehr Schaum herausströmen, und ein negativ geladenes Raumelement wird mehr Schaum einsaugen als nach aussen senden. Ist die Ladung konstant, so würde hiernach in dem Raumelemente im ersteren Falle der Äther mit konstanter Geschwindigkeit sich verdünnen, im letzteren dagegen sich mit konstanter Geschwindigkeit anhäufen oder kondensieren. Differenziert man die Differentialgleichungen (2) der Bewegungen des Schaumes nach den entsprechenden x_i, addiert die Resultate und berücksichtigt man dafs

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \xi_i = \sum \nabla^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = + \nabla^2 \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}$$

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = - \nabla^2 \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}$$

ist, so ergiebt sich nach (21):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

d. h.: insofern keine konvektive Bewegung der Elektricität stattfindet, bleibt die Verteilung derselben in Isolatoren mit der Zeit unveränderlich.

In räumlich mit Elektricität geladenen Teilen eines Dielektrikums würde, der Formel (21) zufolge, die Dichte ϱ des Schaumes, also auch die induktive dielektrische Kapacität K mit der Zeit proportional wachsen oder abnehmen, falls der hypothetische Äther hier ebenso wie in ungeladenen Teilen sich verhalten würde. Dies wäre in der That eine unangenehme Konsequenz der Gleichengen (9), (10). Man kann aber von einer räumlich verteilten Elektricitätsmenge lediglich nur als von einem mathematischen Begriffe reden, welcher oft in der Rechnung bequem zu handhaben ist. In Wirklichkeit tritt eine elektrische Ladung nur an der gemeinsamen Grenzfläche zweier verschiedener Medien, also etwa an der Trennungsfläche zweier Dielektrika oder an der Oberfläche eines in einem Dielektrikum tauchenden Konduktors, auf. In diesem Fall häuft sich der Schaum an oder verdünnt sich derselbe nur in einer verschwindend dünnen Schicht (welcher Vorgang, der enormen Kompressibilität des Schaumes wegen, unserem Vorstellungsvermögen keine Schwierigkeiten bereitet), nur in einer solchen kann sich also ϱ oder K ändern. — Es gilt dann allgemein die Gleichung (20), welche an der Oberfläche eines Konduktors in

$$\sigma = -\frac{1}{c}\sum l_i \varrho \dot{\xi}_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

übergeht. Die positiv geladenen Elemente ds der Konduktoroberfläche senden nach aufsen in jeder Sekunde die Äthermassen $c\sigma ds$ aus, die negativ geladenen saugen in derselben Zeit $c\sigma ds$ ein. In dem umgebenden Dielektrikum bewegen sich die Ätherteilchen, wie wir schon wissen, längs der elektrischen Kraftlinien, sobald nur das Feld stationär ist; die elektrischen Kräfte sind überall den Geschwindigkeiten der Ätherteilchen proportional. Durch jeden Querschnitt q eines Strom- oder elektrischen Kraftfadens strömen in gleichen Zeiten die gleichen ($cq\mathfrak{D}$) Schaummassen, d. h. nach (16): die

elektrische Induktion durch einen Querschnitt eines elektrischen Kraftfadens, ist an jeder Stelle desselben ein und dieselbe. An den Stellen, wo die Fäden des Feldes abbrechen, werden diese Schaummassen ($cq\mathfrak{D}$) eingesaugt oder ausgesandt werden, und somit elektrische Ladungen auftreten, d. h.: ein elektrischer Kraftfaden kann, in einem stationären Felde, nur an elektrisierten Flächenteilen Anfang und Ende haben, welche entgegengesetzt gleiche Ladungen beherbergen. Bleibt das elektrische Feld ungeändert, so dauert die stationäre Bewegung des Äthers in dem isolierenden Dielektrikum fort (während im Innern leitender Körper die Ätherteilchen in Ruhe sich befinden, d. h. keine elektrischen Kräfte wirken; betrachtet man die leitenden Substanzen als „halbleitende" Dielektrika von sehr grofser Leitungsfähigkeit, so ergiebt sich der zuletzt ausgesprochene Satz direkt aus der Annahme, welche weiter unten, über die Art und Weise der Bewegung des Schaumes in Halbleitern, gemacht wird); die elektrostatische Energie des Feldes ist gleich der lebendigen Kraft dieser Bewegung.

Mit Hilfe der obigen mechanischen Deutung des elektrostatischen Feldes will ich noch in anschaulicher Weise einen Teil des Coulombschen Gesetzes der elektrischen Anziehung und Abstofsung ableiten. Es sei z. B. eine positive Elektrizitätsmenge e auf der Oberfläche einer leitenden Kugel k, welche in einem homogenen isotropen Dielektrikum ruht, gleichmäfsig verteilt. Dann sendet die Kugel nach Aufsen in jeder Sekunde die Schaummasse ce aus, woran jedes ihrer Flächenelemente in gleichem Mafse beteiligt ist; der Symmetrie wegen strömt der Schaum im äusseren Dielektrikum längs der verlängerten Radien der Kugel k, und zwar so, dafs die resultierende Geschwindigkeit ξ längs eines jeden Radius in ein und derselben Weise sich ändert. Man denke sich nun in dem Dielektrikum zwei mit k koncentrische Kugeln, deren Radien r, r' sein mögen; durch die Oberflächen dieser Kugeln müssen dann in gleichen Zeiten gleiche Äthermassen strömen; sonst würde ja der Äther irgendwo in der von den beiden Kugelflächen begrenzten Schale kondensiert oder verdünnt werden, und somit würden daselbst, gegen die Annahme,

elektrische Ladungen auftreten; die Geschwindigkeiten $\dot{\xi}$, $\dot{\xi}'$ der Schaumteilchen in den Entfernungen r, r' von dem Mittelpunkte der Kugel k verhalten sich also umgekehrt wie die Flächen der beiden Hilfskugeln, d. h.: $\dot{\xi}' : \dot{\xi} = r^2 : r'^2$, und beide Geschwindigkeiten sind aufserdem der während einer Sekunde ausgesandten Äthermasse ce proportional. Der Gleichung (13) zufolge gilt dasselbe auch für die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$. Dabei kann man die Kugel k in einen Punkt zusammenschrumpfen lassen, und man erhält also für die elektrische Kraft in der Entfernung r von einem mit der Elektricitätsmenge e geladenen Teilchen, bei passender Wahl der Einheiten, $\mathfrak{E} = er^{-2}$.

Wird die elektrische Ladung eines Konduktors, z. B. einer unendlichen horizontalen leitenden Platte, etwa nach dem Gesetze

$$\sigma = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

periodisch mit der Zeit geändert, so bewegt sich der Äther, wenigstens ganz dicht an der Platte, auf und ab, je nachdem er von derselben emittiert oder eingesaugt wird; es folgt nämlich aus (20), falls die Axen x_2, x_3 in der Ebene $(x_1 = 0)$ der Platte liegen und weil σ von x_2, x_3 unabhängig ist, für jeden Punkt der Ebene $x_1 = 0$:

$$\varrho \dot{\xi}_1 = -ca \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_3 = 0. \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

Diese schwingende Bewegung wird jedenfalls dem Äther in dem umgebenden Dielektrikum mitgeteilt werden. Würde der Äther in dem Dielektrikum inkompressibel sein, so müfste er als ein Ganzes ebenso wie ein starrer Körper sich auf und ab bewegen. Ist jedoch der Äther zusammendrückbar, und fassen wir in den Gleichungen (2), wie bisher, das Verhältnis seiner elastischen Konstanten $A : B$ als eine sehr kleine aber von Null verschiedene positive Gröfse auf —, und setzen entsprechend in den elektromagnetischen Gleichungen (1) $\left(\frac{1}{K\mu} - \lambda'\right) \partial \mathfrak{F}/\partial x$ anstatt $\frac{1}{K\mu} \partial \mathfrak{F}/\partial x$, wo $\lambda' : (K\mu)^{-1}$ sehr klein

ist, so werden die Schwingungen (*b*) von der Oberfläche der Platte aus in der Form ebener Dilatations- oder Longitudinalwellen in der Richtung x_1, mit der Geschwindigkeit $(A/\varrho)^{1/2} = \delta^{1/2}$ sich fortpflanzen, im Einklange mit der aus (2) folgenden Differentialgleichung $\varrho\,\partial^2\xi_1/\partial t^2 = A\,\partial\xi_1/\partial x_1$ und unter der Annahme kleiner Exkursionen und Dichtigkeitsänderungen. Die Wellenlänge wird $\lambda = (A/\varrho)^{1/2}\,T$ sein. Befindet sich nun in der Entfernung $X_1 = n(A/\varrho)^{1/2}\,T$ (wo $n = 1, 2, 3 \ldots .$) von der x_2x_3-Ebene eine zweite der ersteren parallele ebenfalls unendliche Platte, deren elektrische Ladung in gleicher Weise nach dem Gesetze (*a*) variiert, in deren Nähe also der Äther gemäfs (*b*) vibriert, so würde der Äther zwischen den beiden Platten in $2n$ von einander um je $\lambda/2$ cm entfernten festen Ebenen $x_1 = \lambda/4,\ 3\lambda/4,\ \ldots .\ (4n-1)\lambda/4$ beständig ruhen; in sämtlichen Punkten dieser Ebenen und nur in diesen würden also, der Gleichung (12) zufolge, keine elektrischen Kräfte wirken [1]).

Die Richtigkeit der obigen Hypothesen vorausgesetzt, könnte eine derartige Erscheinung in dem elektrischen Felde natürlich nur dann beobachtet werden, falls die Periode T sich so grofs wählen liefse, dafs die Wellenlänge $\lambda = \delta^{1/2}\,T$ mefsbar grofs sei; ist $\delta^{1/2}$ sehr klein, so mufs man die elektrischen Ladungen der Platten entsprechend langsam variieren lassen; es könnte aber $\delta^{1/2}$ sehr wohl die Gröfsenordnung der Schallgeschwindigkeit, z. B., erreichen, unbeschadet der Beziehung $A : B =$ einer sehr kleinen Zahl, und in diesem Falle würden sich die diesbezüglichen Experimente ohne grofse Schwierigkeit realisieren lassen. — (Die Einführung oder Nichteiführung der Gröfse δ in die Gleichungen des Feldes ist jedenfalls nicht Sache der Ansichten; vielmehr mufs der fragliche Punkt durch Experimente entschieden werden.)

Würde aber das Substrat elektromagnetischer Erscheinungen, die optischen mitbegriffen, seiner Konstitution nach nicht, wie wir es voraussetzten, — dem Thomsonschen

[1]) Die magnetischen Kräfte werden in dem betrachteten Falle überall verschwinden, weil die Deformation des Äthers in jedem Augenblicke irrotational ist.

Schaumäther ($A : B = 0$), sondern vielmehr dem Greenschen Äther ($A : B = \infty$) sich nähern, sodafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatationswellen sehr grofs im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit wäre, so würde jede Hoffnung, die elektrischen Longitudinalwellen wahrnehmbar zu machen, aufgegeben werden müssen, weil in diesem Falle die Wellenlängen λ enorm grofs sein würden, wenn es auch gelingen sollte, die elektrischen Ladungen der Platten mit der Schnelligkeit der Lichtschwingungen periodisch zu ändern. —

Es wurde oben ein vollkommen isolierendes Dielektrikum behandelt und demgemäfs das Gleichungssystem (1) benutzt; ist, um einen allgemeineren Fall zu betrachten, das Medium ein Halbleiter, dessen specifische Hauptleitungsfähigkeiten C_i der Richtung nach mit den K_i zusammenfallen, so hat man das System (1) durch

$$K_i \mu \frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} + \nabla^2 F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + 4 \pi \mu C_i \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0 \quad . \quad (24)$$

zu ersetzen. Demgemäfs ergänzen wir die Bewegungsgleichungen des Schaumäthers, indem wir schreiben:

$$\varrho_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + B \nabla^2 \xi_i + B \frac{\partial}{\partial x_i} \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \varkappa_i \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = 0; \quad . \quad (25)$$

die Hinzufügung der Glieder $\varkappa_i \xi_i$ ist der Annahme äquivalent, dafs in einem Halbleiter die Ätherteilchen einen reibungsähnlichen Widerstand zu bekämpfen haben, dessen Komponenten den Geschwindigkeiten ξ_i proportional sind; diesen Widerstand kann man sich durch eine Reibung zwischen den Schaumteilchen und den gröberen Molekülen des Halbleiters veranlafst denken. Die Leitungsfähigkeiten C_i sollen jetzt durch die Hauptreibungskoëfficienten $\varkappa_i$ ausgedrückt werden; vergleicht man, wie oben, die Koëfficienten der Gleichungen (24) und der durch B dividierten Gleichungen (25), so ergiebt sich:

$$4 \pi \mu C_i = \varkappa_i B^{-1}; \quad C_i = \varkappa_i \frac{B^{-1}}{4 \pi \mu};$$

also nach (10):

$$C_i = \frac{1}{c^2} \varkappa_i; \quad i = 1, 2, 3 \ldots \quad (26)$$

Die Leitungsfähigkeiten C_i eines Halbleiters sind somit den Reibungskoëfficienten des Schaumäthers direkt proportional. Ferner sind nach (12), (25) die Komponenten des Leitungsstromes

$$p_i = C_i P_i = -\frac{\varkappa_i}{c} \dot{\xi}_i, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

d. h. den Komponenten der, für eine Volumeinheit berechneten, zur Überwindung der Reibung nötigen mechanischen Kraft direkt proportional, während der elektrische Verschiebungsstrom der elastischen Kraft proportional war.

In einem vollkommen isolierenden Medium (in welchem keine molaren Massen bewegt wurden) konnte nur eine gegenseitige Umsetzung der potentiellen Energie der elastischen rotationalen Deformation des Äthers (magnetische Energie) und der lebendigen Kraft der Ätherteilchen (elektrische Energie) vor sich gehen, sodafs die gesamte elektromagnetische Energie konstant blieb. In einem Halbleiter aber geht wegen der Reibung ein Teil der mechanischen Energie des Äthers in Wärme über, welche der Quantität nach der gegen den Reibungswiderstand geleisteten Arbeit äquivalent ist. Bezeichnet man die (mechanisch gemessene) Wärme, welche während einer Sekunde in dem Volumelement $d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3$ erzeugt wird, mit $Q d\tau$, so ist also:

$$Q d\tau dt = \sum \left(\varkappa_i \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial t} d\xi_i \right) d\tau = \sum \left(\frac{\varkappa_i}{c} \dot{\xi}_i \cdot c \dot{\xi}_i \right) d\tau dt, \quad \ldots \quad (28)$$

oder nach (27) und (12):

$$Q d\tau = \Sigma p_i P_i d\tau = P_1 dx_1 \cdot p_1 dx_2 dx_3 + \\ + P_2 dx_2 \cdot p_2 dx_1 dx_3 + P_3 dx_3 \cdot p_3 dx_1 dx_2; \quad \ldots \quad (29)$$

das ist aber genau der Ausdruck der Joule'schen Wärme, welche während einer Sekunde in dem Elemente $d\tau$ des Halbleiters entwickelt wird. Die Joulesche Wärme entsteht also in ihrem ganzen Betrage auf Kosten der mechanischen Energie der elastischen Deformation und der geordneten Bewegung

des Schaumäthers, durch Reibung, welche zwischen den Schaumteilchen und den ponderablen Molekülen des Halbleiters stattfindet. In einem solchen Medium mufs demnach wenigstens die kinetische Energie des Äthers oder die elektrische Energie des Feldes nach und nach ganz in Wärme übergehen. — Der Identität der Joule'schen und der Reibungswärme zufolge genügt das oben entworfene mechanische Bild auch in dem allgemeinen Falle eines Halbleiters —, in welchem die gesamte elektromagnetische Energie veränderlich ist, — in jedem Augenblicke der Forderung $E_e \equiv E_m$, wo E auf irgend einen, noch so kleinen, Raumteil bezogen werden kann. —.

Januar-März, 1893.

Thesen.

In der Physik fehlt es bis auf den heutigen Tag an Principien einer allgemeinen Thermodynamik; die sogenannte Thermodynamik ist eigentlich blos Thermostatik.

Man kann die Masse durch reine Bewegungserscheinungen quantitativ definieren, ohne sich dabei auf den Begriff der Kraft als einer „Bewegungsursache" zu stützen.

Werden die Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen einer Flüssigkeit in der Clebsch'schen Form: $u_i = \partial\varphi/\partial x_i + \lambda\partial\psi/\partial x_i$, $i = 1, 2, 3$, dargestellt, so bilden die Strömungslinien mit den Wirbellinien dann und nur dann ein orthogonales System, wenn die Flächenschaaren $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$ gemeinsame Schnittkurven besitzen.

Vita.

Ludovicus Silberstein, Varsoviensis, natus sum die XV mensis Maii anno Domini MDCCCLXXII, patre Samuelo, matre Aemilia e gente Steinkalk, utroque adhuc vivo. Fidem profiteor mosaicam.

Varsoviae gymnasium adii, quod vocant secundum philologicum, postea Cracoviae adii gymnasium Sancti Hyacinthi. Ubi, octo classibus absolutis, in universitate Jagellonica studiis physicis et mathematicis per bis senos menses usque ad annum MDCCCXC me dedidi. Deinde Heidelbergam me contuli, ubi studiis jam dictis ac philosophiae me dedidi; qua ex universitate anno MDCCCXCI in Berolinensem transgressus in illis studiis adhuc versabar.

Audivi viros illustrissimos hos:
in universitate Jagellonica: Witkowski, Karlinski;
in universitate Ruperto-Carola: Königsberger, Schapira, Quincke, Kuno Fischer;
in universitate Friderica Guilelma: de Helmholtz (†), Planck, Kronecker (†), Fuchs, Fischer, König, Ebbinghaus, Pringsheim, Wesendonck, Wien, Glan, Lehmann-Filhés, Eck, Wagner.

Praeterea Witkowski, Karlinski, Quincke, Koenigsberger, Planck, Kronecker (†), Fuchs, Schwarz, Frobenius ad exercitationes practicas et theoreticas in studiis physicis ac mathematicis aditum mihi concesserunt.

Quibus viris omnibus, imprimis vero Witkowski, Koenigsberger, Planck, de Helmholtz (†), optime de me meritis gratias ago agamque semper quam maximas.